

的方程 $g[f(x)]=0$ 中 $f(x)$ 解的个数, 再根据个数与 $f(x)$ 的图像特点, 分配每个函数值 $f_i(x)$ 被几个 x 所对应, 从而确定 $f_i(x)$ 的取值范围, 进而决定参数的范围.

答题注意:

1. 函数零点—忽视单调性的存在. 例如: 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的图像是连续不断的曲线, 且 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内有一个零点, 则 $f(-2) \cdot f(2)$ 的值 ()

A. 大于 0 B. 小于 0 C. 等于 0 D. 不能确定

解答: 若函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内有一个零点, 该零点可分两种情况: (1) 该零点是变号零点, 则 $f(-2) \cdot f(2) < 0$; (2) 该零点是非变号零点, 则 $f(-2) \cdot f(2) > 0$, 因此选 D.

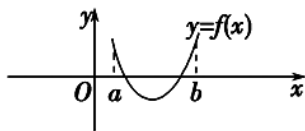
方程的根或函数零点的存在性问题, 可以根据区间端点处的函数值的正负来确定, 但要确定零点的个数还需进一步研究函数在区间上的单调性, 在给定的区间上, 如果函数是单调的, 它至多有一个零点, 如果不是单调的, 可继续细分出小的单调区间, 再结合这些小的区间的端点处函数值的正负, 作出正确判断. 本题的解答错误在于没有正确理解函数零点的含义及存在性, 事实上, 当 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 内有一个零点时, $f(-2) \cdot f(2)$ 的符号不能确定.

2. 要注意对于在区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 若 x_0 是 $f(x)$ 的零点, 却不一定有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 即 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 仅是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上存在零点的充分条件, 而不是必要条件.

注意以下几点: ①满足零点存在性定理的条件的零点可能不唯一;

②不满足零点存在性定理条件时, 也可能有零点.

③由函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有零点不一定能推出 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 如图所示. 所以 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 是 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有零点的充分不必要条件.



注意: ①如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的曲线, 并且函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是一个单调函数, 那么当 $f(a) \cdot f(b) < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有唯一的零点, 即存在唯一的 $c \in (a, b)$, 使 $f(c)=0$.

②如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的曲线, 并且有 $f(a) \cdot f(b) > 0$, 那么, 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内不一定没有零点.

③如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的曲线, 那么当函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点时不一定有 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 也可能有 $f(a) \cdot f(b) > 0$.

【例 10】 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 且周期为 1 的函数, 在区间 $[0, 1)$ 上, $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in D \\ x, & x \notin D \end{cases}$ 其中集合 $D = \{x \mid x = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ 则方程 $f(x) - \lg x = 0$ 的解的个数是_____.

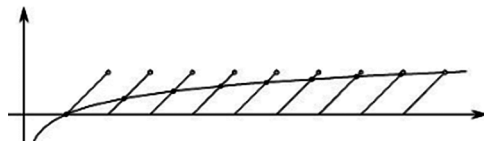
【解析】 由于 $f(x) \in [0, 1)$, 则需考虑 $1 \leq x < 10$ 的情况.

在此范围内, $x \in \mathbb{Q}$ 且 $x \in \mathbb{Z}$ 时, 设 $x = \frac{q}{p}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, 且 p, q 互质.

若 $\lg x \in \mathbb{Q}$, 则由 $\lg x \in (0, 1)$, 可设 $\lg x = \frac{n}{m}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$, 且 m, n 互质.

因此 $10^{\frac{n}{m}} = \frac{q}{p}$, 则 $10^n = (\frac{q}{p})^m$, 此时左边为整数, 右边非整数, 矛盾, 因此 $\lg x \notin \mathbb{Q}$.

因此 $\lg x$ 不可能与每个周期内 $x \in D$ 对应的部分相等, 只需考虑 $\lg x$ 与每个周期 $x \notin D$ 的部分的交点, 画出函数图像, 图中交点除 $(1, 0)$ 外其它交点横坐标均为无理数, 属于每个周期 $x \notin D$ 的部分, 且 $x=1$ 处 $(\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{\ln 10} < 1$, 则在 $x=1$ 附近仅有一个交点, 一次方程解的个数为 8.



【点评】 本题主要考查复合函数的零点. 该题能较好地考查同学们的运算能力、动手作图能力以及观察能力等. 解答此类问题, 关键在于“抽茧剥丝”, 把复合函数问题转化为单函数问题, 准确作出函数图像, 利用图像解决问题.

【同步练习】

1. 函数 $f(x) = ax^2 - 2x + 1$ 在区间 $(-1, 1)$ 和区间 $(1, 2)$ 上分别存在一个零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $-3 < a < 1$ B. $\frac{3}{4} < a < 1$ C. $-3 < a < \frac{3}{4}$ D. $a < -3$ 或 $a > \frac{3}{4}$

2. 函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(x)$, 且当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) = |x|$. 若函数 $y=f(x)$ 的图像与函数 $g(x) = \log_a x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图像有且仅有 4 个交点, 则 a 的取值集合为 ()

A. $(4, 5)$ B. $(4, 6)$ C. $\{5\}$ D. $\{6\}$

3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - \frac{9}{4}, & x \leq 0 \\ x - 2, & x > 0 \end{cases}$ 若方程 $f(x) = a$ 有两个不相等的实数根, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}] \cup [-2, +\infty)$ B. $(-2, +\infty)$

C. $(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}] \cup [-2, +\infty)$ D. $[-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}] \cup (-2, +\infty)$

4. 已知 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) - m$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 上有两个零点, 则 m 的取值范围为 ()

A. $(1, 2)$ B. $[1, 2]$ C. $[1, 2)$ D. $(1, 2]$

5. 设 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$, 且在 $[-1, 1]$ 上是增函数, 且 $f(-1) = -1$, 若函数 $f(x) \leq t^2 - 2at + 1$ 对所有的 $x \in [-1, 1]$, 当 $a \in [-1, 1]$ 时都成立, 则 t 的取值范围是 ()